איך הופכים מגרגר חול לארמון ?

ומה הקשר לבועות סבון ?

חפירות IRL 2021

שי סדובסקי // בהנח"ת שירי ארנשטיין - אביצן

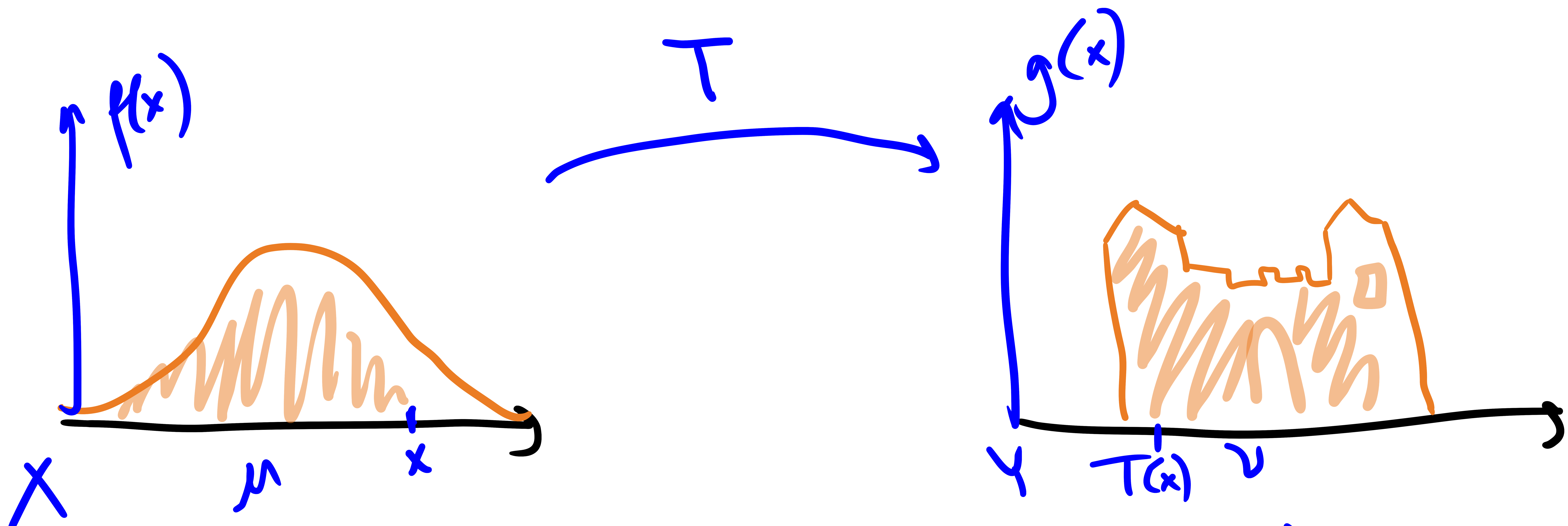
שאלה: נניח שיש לי פירמידה של חול.

μ הויגרל

איך אוכל לסדר את החול בצורה T

של ארמון ν בצורה הכי יעילה?

$c: X \times Y \to \mathbb{R}$



$$\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B)$$

בעיית מונז׳ — optimal transport

תהי μ מידת הסתברות על X, ν מידת הסתברות על Y, ו- $c: X\times Y\to\mathbb{R}$ פונק׳ מחיר. האם יש העתקה $T: X\to Y$ כך ש-

(א) T העתקת טרנספורטציה, לכל $B\subseteq Y$ מדידה לפי ν,
$$\boxed{\nu(B)=\mu(T^{-1}(B))}$$

באופן שקול, נדרוש שלכל f רציפה וחסומה
$$\int f(T(x))\,d\mu(x)=\int f(x)\,d\nu(x)$$

(ב) T הכי יעילה, כלומר משיגה את

$$\inf_{\substack{S: X\to Y\\ \text{טרנס׳}}} \int_X c(x,S(x))\,d\mu$$

הערות:

1. לא תמיד יש T שעונה על הקריטריון (א).
לדוגמה: $\nu = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{0\}} + \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{1\}}$ $\quad \mu = \mathbb{1}_{\{1\}}$

2. לפעמים יש inf ואין T שמשיגה אותו, כלומר ייתכן (א) אבל לא (ב).

3. אפשר גם לבקש $c: X\times Y \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, כלומר שיהיו סידורים אסורים.
(עם זה המחקר שלי)

היום נתמקד במחיר הקוודרטי שהוא

המקרה הכי נחקר: $c(x,y) = \|x-y\|_2^2$.

$$\underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\in}{x}},\ \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\in}{y}}$$

$$\|x-y\|_2^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$$

$$c(x,y) = -\langle x,y\rangle$$

נחפש $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ מאטצ'ינג בין μ ל-ν

ומקיים

$$-\int_X \langle x, Tx\rangle \, d\mu$$

יהיה הקטן ביותר.

משפט ברנייר - מקקאן

יהי $X=Y=\mathbb{R}^n$ ו- $\mu,\nu\in P(\mathbb{R}^n)$. נניח בנוסף של- ν תומך קומפקטי וש- μ ~~לא~~ מתאפסת על ~~אף~~ כל היפר-מישור. אז קיימת $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שפותרת את בעיית מונג' בין μ ל- ν ביחס למחיר $c(x,y)=-\langle x,y\rangle$.

נראה ש- $T=D\varphi$ עבור $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ קמורה!

נוכיח לפי רעיון של K. Ball

הוכחה: בשלב ראשון, נעשה רדוקציה למקרה בו ν דיסקרטית:

$$\nu=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \mathbb{1}_{u_i}, \quad u_i\in\mathbb{R}^n, \quad \alpha_i\in(0,1), \quad \sum\alpha_i=1$$

$\mathbb{R}^n$

הנקודה u_i — "מקודדת" כפונקציונל —

$$u_i \to -\langle\cdot,u_i\rangle:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$

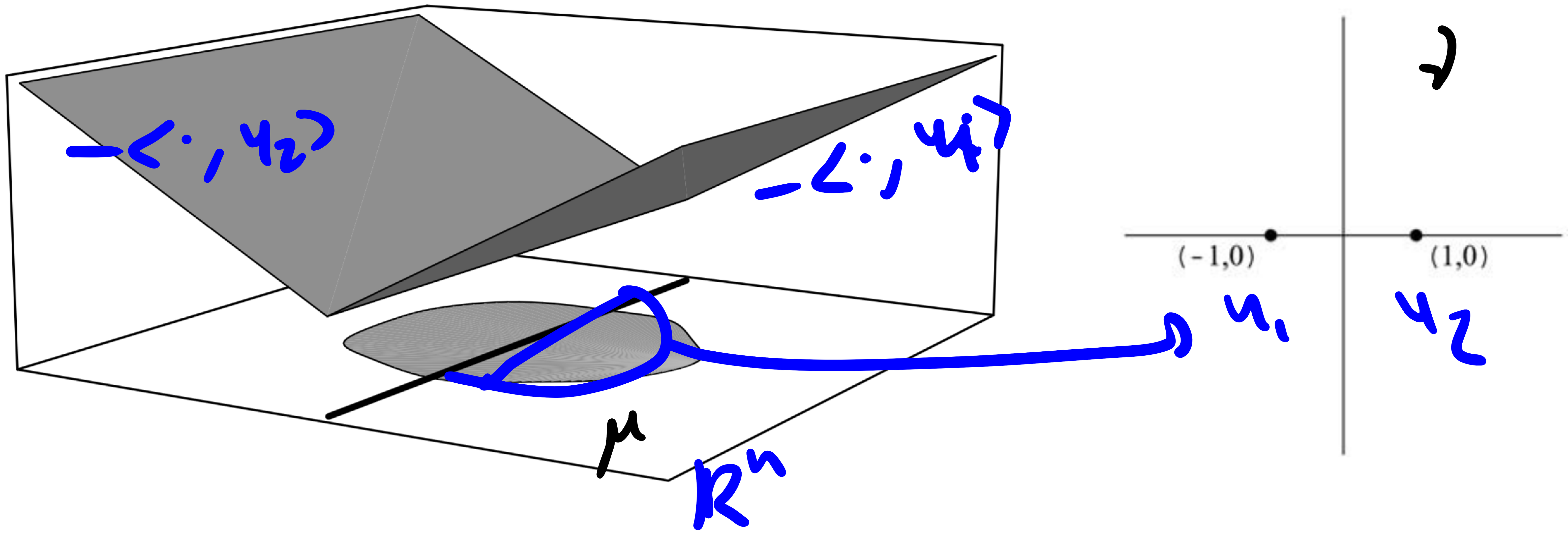
נסתכל על כל הפונקציונלים מהצורה

$$\varphi_t(x)=\max_{i=1,\dots,m}\left\{-\langle x,u_i\rangle-\frac{1}{t_i}\right\}$$

$$\Delta^m=\left\{t_i\in(0,1)\ \sum_{i=1}^{m}t_i=1\right\} \quad t\in\Delta^m$$

המשך...

$(x,y) \to x+2y$
$\langle \binom{x}{y}, \binom{1}{2} \rangle$



כ פונק' $\varphi_t(x)$ נותנת חלוקה של $\mathbb{R}^n$ לתחומי'

הנורמלים שלה $(A_1^t, \dots, A_m^t)$. נסמן גם

ש $\varphi_t \triangleright$ מעביר $x \longrightarrow \mu$ למידה

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \mathbb{1}_{\{u_i\}} .$$

נגדיר פונק' $H : \Delta^m \to \Delta^m$

$$t \longmapsto (\mu(A_1^t), \dots, \mu(A_m^t)) \in \Delta^m$$

המשך...

טענה: H על.

צ"ל די ש- $\underset{j}{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)} \to \underset{j}{(0,\dots,0,1,0,\dots,0)}$

$\inf\{\langle x, y_j\rangle - \frac{1}{1}\}$.

כל פאה של Δ^m מוסל' $\to$ לעצמה.

נניח בשלילה ש- $(a_i)_{i=1}^m \notin \operatorname{Im} H$.

אז יש הטלה $\pi: \Delta^m \setminus (a_i) \to \partial\Delta^m$. בנוסף יש

$\sigma: \Delta^m \to \Delta^m$ שמשנה ___ את הקודקודים.

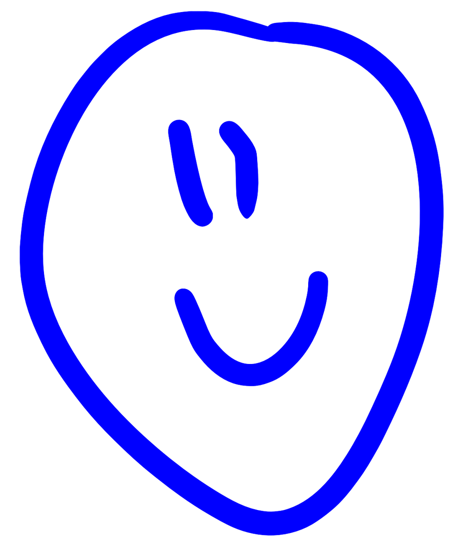
סה"כ $\sigma \circ \pi \circ H: \Delta^m \to \partial\Delta^m$ ~~ה~~ ... ללא נק' שבת.

השך...

מצאנו שעבור ν דיסקרטית יש $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$

כך ש- $T=\nabla\varphi$ היא טרנספורטציה מ-μ ל-ν.

נותר עוד להוכיח:



(1) שאפשר לקרב כל ν מידה קומפקטית על ידי
ν_k דיסקרטיות ולקבל $T_k=\nabla\varphi_k$ שמתכנסות
ל- $T=\nabla\varphi$ הטרנספורטציה מ-μ ל-ν.

(2) להוכיח שכל טרנספורטציה מ-μ ל-ν
שהיא גרדיינט של פונ' קמורה

$$T=\nabla\varphi$$

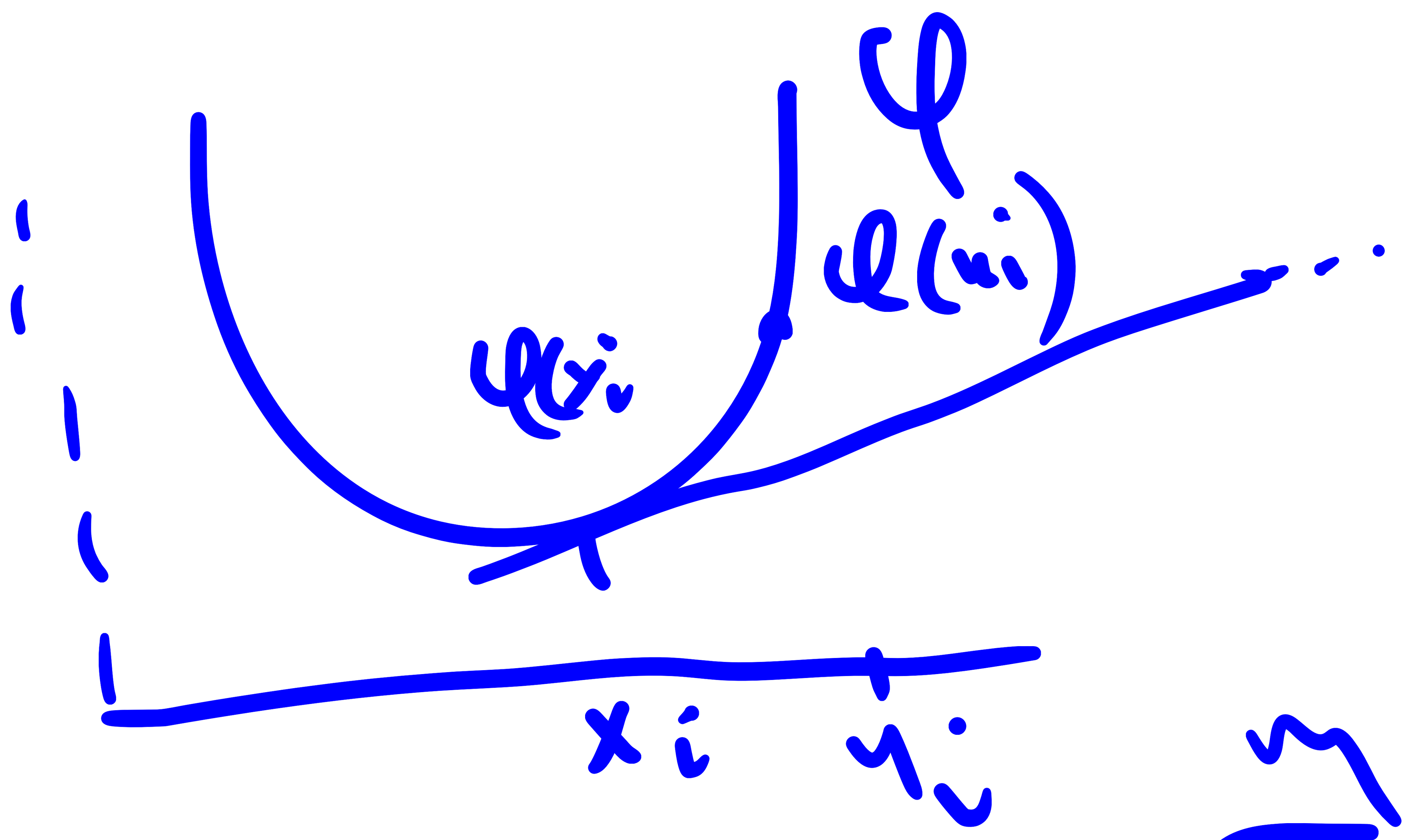
היא גם אופטימלית.

כדי להראות אופטימליות מספיק להראות שלכל

אוסף סופי של נקודות $x_1, \dots, x_m$

$$\sum_{i=1}^{m} -\langle x_i, Tx_i\rangle \le \sum_{i=1}^{m} -\langle u_i, Tx_i\rangle$$

כאשר $\{u_i\}_{i=1}^m$ זו פרמוטציה של $\{x_i\}_{i=1}^m$. ואכן...



נזכור ש- $T = \nabla\varphi$

$$\varphi(u_i) \ge \varphi(x_i) + \langle u_i - x_i, \nabla\varphi(x_i)\rangle$$

$$\sum -\langle u_i, T(x_i)\rangle = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\varphi(u_i) - \varphi(x_i)\right)}_{0} + \sum_{i=1}^{m} -\langle u_i, T(x_i)\rangle$$

$$\ge \sum_{i=1}^{m} -\langle x_i, T(x_i)\rangle$$

הערות:

① כדאי לקרוא את ההוכחה של ברנייר, היא
מציגה עוד הרבה רעיונות חשובים.

② שימו לב, עבור μ עם צפיפות f
ν עם צפיפות g

תנאי הטרנספורציה (קראנו לה א)
שקולה לכך שיש "החלפת משתנים"

$$f(x) = g(Tx)\cdot \det(DT'(x))$$

וזו תכונה שתהיה מאוד שימושית בקרוב.

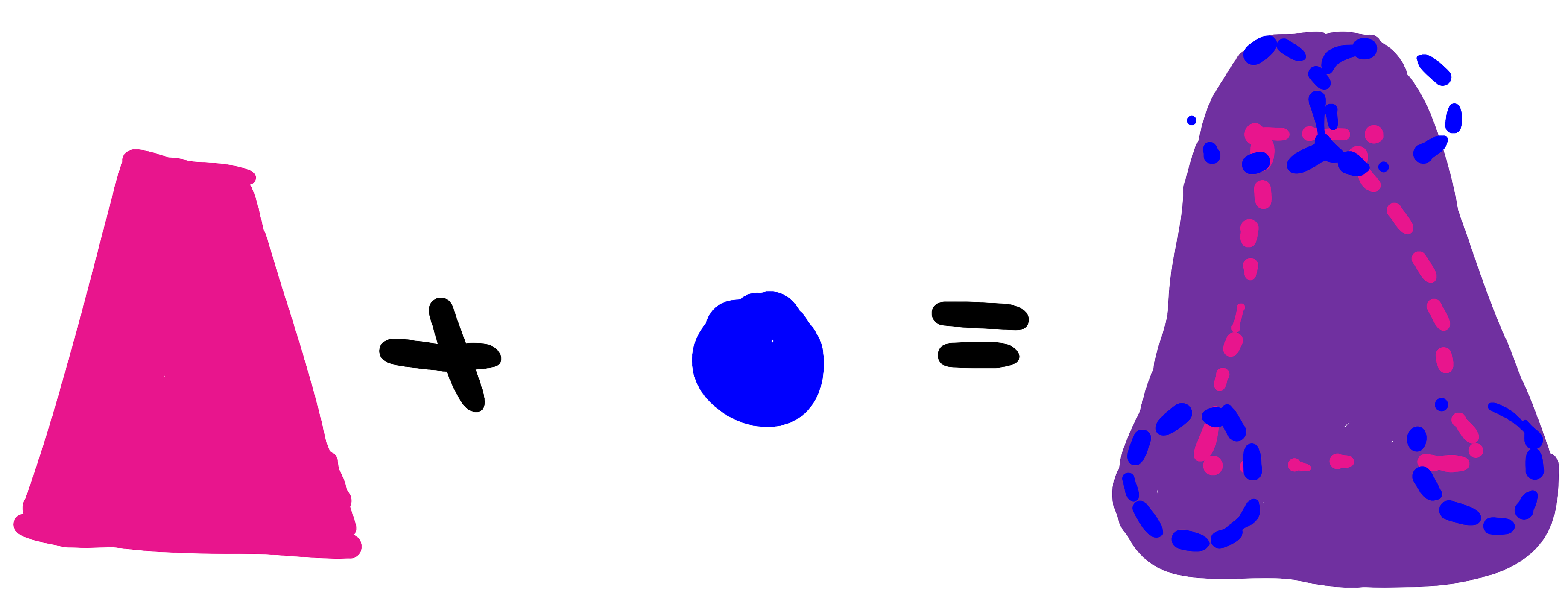
אינטרמצו ג׳אומטרי

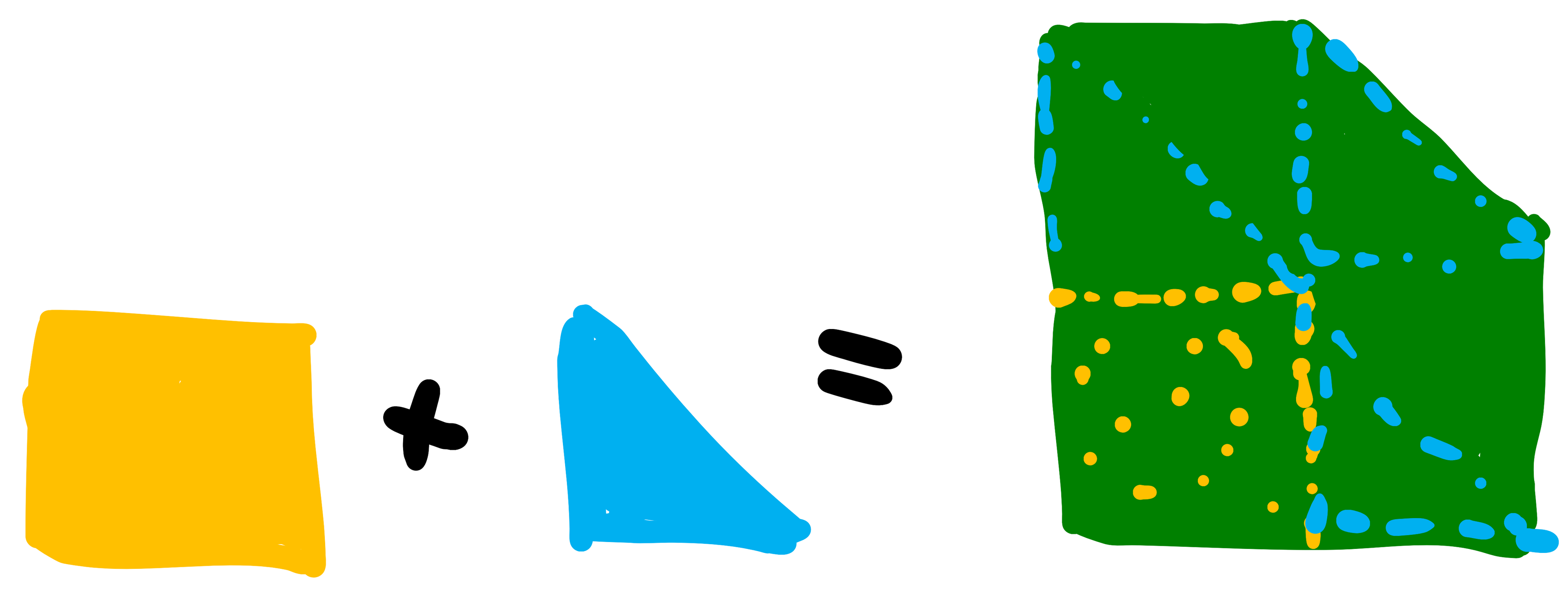
קבוצה A היא קמורה אם הישרים $\mathbb{R}^n$

$$A \supseteq \{(1-\lambda)a_1+\lambda a_2 \mid a_1,a_2\in A\}.$$

סכום מינקובסקי של $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ וקמורות

נתון ע״י $"A+B" := \{a+b \mid a\in A, b\in B\}.$





אי שוויון ברון-מינקובסקי

עבור $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ קמורות, מתקיים

$$\mathrm{vol}\left((1-\lambda)A+\lambda B\right)^{\frac{1}{n}}\geq(1-\lambda)\,\mathrm{vol}(A)^{\frac{1}{n}}+\lambda\,\mathrm{vol}(B)^{\frac{1}{n}}.$$

באופן שקול (תרגיל):

$$\mathrm{vol}\left((1-\lambda)A+\lambda B\right)\geq\mathrm{vol}(A)^{1-\lambda}\,\mathrm{vol}(B)^{\lambda}$$

טרנספורט ג'ה $\Leftarrow$ BM

$$\nu = \frac{1}{vol B}\cdot vol\Big|_B \Leftarrow \underline{B} \qquad\qquad \mu = \frac{1}{vol A}\cdot vol\Big|_A \Leftarrow \underline{A}$$

לפי משפט ברנייה יש $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ - קמ ארגומנט:

כך ש- μ ל- ν.

$$\det(DT) = \frac{vol A}{vol B}$$

$$vol(A+B) \geq vol\big((I+T)(A)\big) = \int_A \det\big(D(I+T)(x)\big)dx$$

אם נגדיר $\overline{D(I+T)}$, אז

אם $(\lambda_1 \dots \lambda_n) = DT$ ע"ע של $D(I+T)$ הם $(1+\lambda_i)_{i=1}^n$ לכן

$$\left(\prod (1+\lambda_i)_{i=1}^n\right)^{\frac{1}{n}} \overset{A/G}{\geq} 1+\left(\prod \lambda_i\right)^{\frac{1}{n}} = 1+\left(\frac{vol A}{vol B}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\geqslant \int_A \left(1 + \left(\frac{\mathrm{Vol}(A)}{\mathrm{Vol}(B)}\right)^{-\frac{1}{n}}\right)^n d\mu = \mathrm{Vol}\,A^{\frac{1}{n}} + \mathrm{Vol}\,B^{\frac{1}{n}}$$

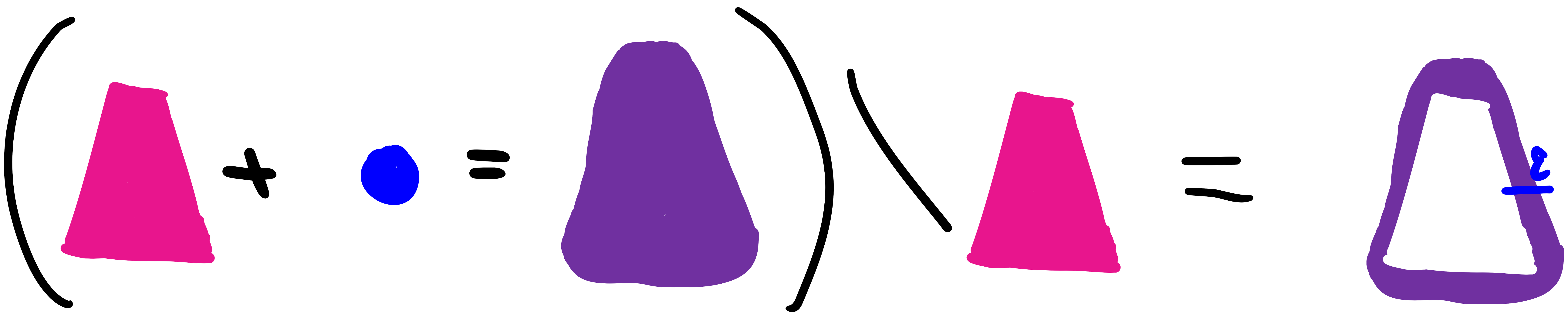
הבטחתי בועות...

מה זה מטח פנים? עבור קבוצה קמורה K, נגדיר

$$S(K) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{vol(K+\varepsilon B) - vol(K)}{\varepsilon} \geq$$

כדור יחידה אוקלידי

פציור ממקוצם:



אז בועות סבון הן עגולות בזכות

א' - השוויון האיזופרימטרי :

$$\frac{\mathrm{vol}(K)^{\frac{1}{n}}}{S(K)^{\frac{1}{n-1}}} \geq \frac{\mathrm{vol}(B)^{\frac{1}{n}}}{S(B)^{\frac{1}{n-1}}}$$

B כדור אוקלידי!

הוכחה בקצרה:

$$S(K) \geq \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\left(\mathrm{vol}(K)^{\frac{1}{n}}+\varepsilon\,\mathrm{vol}(B)^{\frac{1}{n}}\right)^n-\mathrm{vol}(K)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\cancel{\mathrm{vol}(K)} + \cancel{\varepsilon} n\,\mathrm{vol}(B)^{\frac{1}{n}}\cdot \mathrm{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}} + \cancel{o(\varepsilon)} - \cancel{\mathrm{vol}(K)}}{\cancel{\varepsilon}}$$

$$= n\,\mathrm{vol}(B)^{\frac{1}{n}}\cdot \mathrm{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}}$$

$$\Rightarrow \frac{S(K)}{\mathrm{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}}} \geq n\,\mathrm{vol}(B)^{\frac{1}{n}} = \frac{n\,\mathrm{vol}(B)}{\mathrm{vol}(B)^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{S(B)}{\mathrm{vol}(B)^{\frac{n-1}{n}}}$$

תודה על

ההקשבה !

תמשיכו להיות חוקרים

shaysadovsky@mail.tau.ac.il